Aula 14

Rotação I

Sumário

- As variáveis do movimento de rotação
- As variáveis da rotação são vectores?
- Rotação com aceleração angular constante
- A relação entre as variáveis lineares e angulares
- A energia cinética de rotação

Corpo Rígido

Um corpo rígido é um corpo indeformável;

As distâncias relativas entre as posições das partículas de que é composto um corpo permanecem constantes;

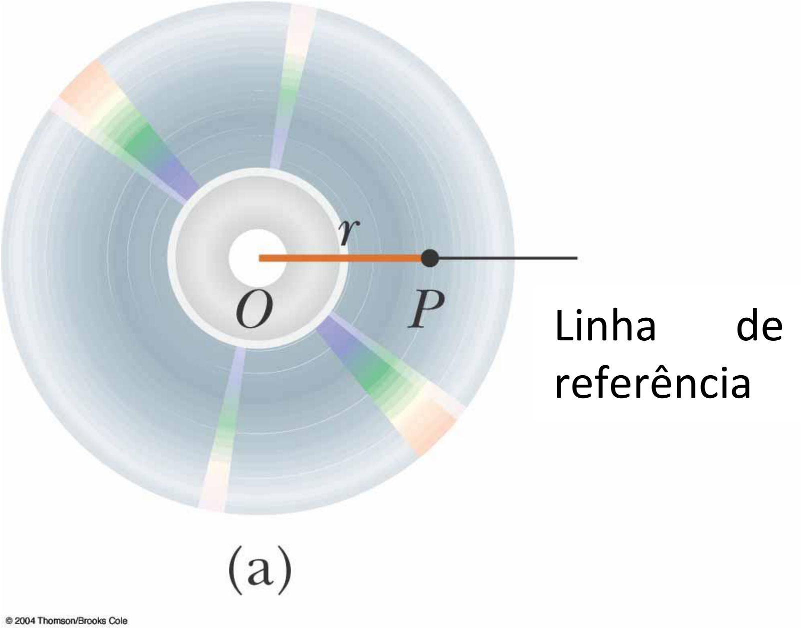
Todos os corpos são, na realidade, deformáveis, mas o modelo do corpo rígido é muito útil em situações em que a deformação é desprezável.

Variáveis angulares - Posição Angular

O eixo de rotação é o centro do disco;

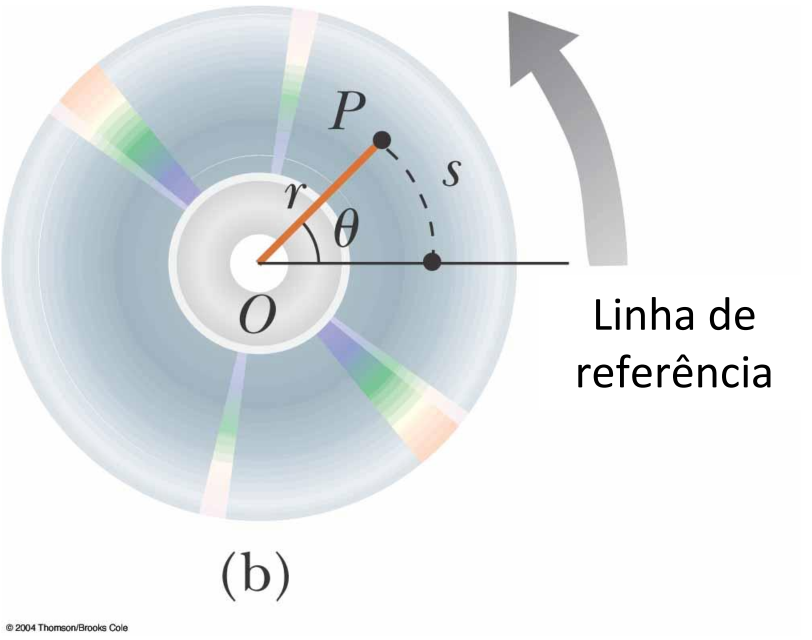
Escolhe-se uma *linha de referência* fixa, passando pela origem *O*;

O ponto *P* está à distância constante, *r*, da origem.



Variáveis angulares - Posição Angular

Quando o disco roda em torno do eixo que passa por O, o ponto *P* descreve uma trajectória circular de raio *r* , centrada em O;



(b)

Todas as partículas que constituem o disco efectuam movimento circular em torno da origem O.

As coordenadas mais convenientes para representar a posição de *P*, ou de qualquer outro ponto, são as *coordenadas polares*;

A posição de *P* é descrita pelas coordenadas (r, θ) em que r é a distância da origem a *P* e θ é o ângulo medido, no sentido contrário aos ponteiros do relógio, a partir da linha de referência.

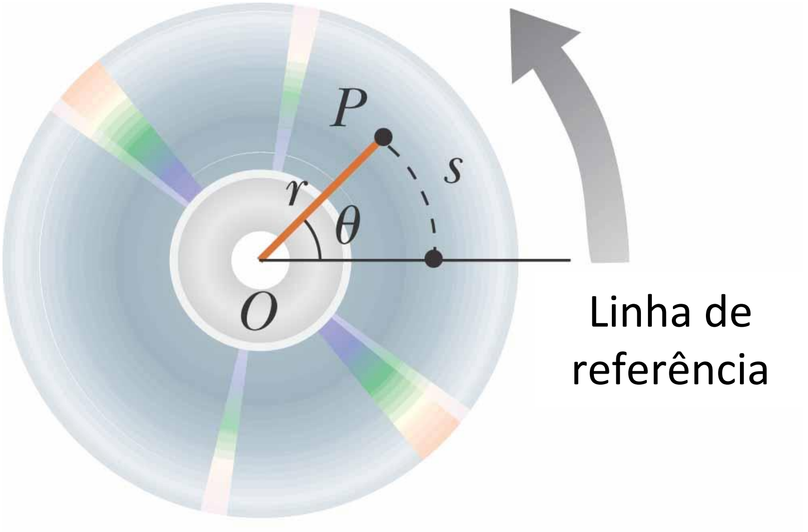
Variáveis angulares - Posição Angular

Quando a partícula se move, a única coordenada que varia é θ;

Ao movimento angular da partícula dado por θ, corresponde um arco de comprimento s;

A relação entre s e r é:

$$s = \theta r$$



(b)

Radiano

Esta expressão pode ser colocada na forma:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

θ não tem dimensões mas exprime-se, em geral, numa unidade artificial, o radiano;

Um radiano é o ângulo subtendido por um arco de comprimento igual ao raio.

Conversão de Unidades

Se compararmos graus com radianos:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3$$

A conversão de graus para radianos é:

$$\theta\,[\text{radiano}] = \frac{\pi}{180^\circ}\theta \ [\text{grau}]$$

Variáveis angulares - Posição Angular

Podemos associar o ângulo θ a uma determinada partícula do corpo e ao corpo rígido *como um todo;*

Todas as partículas do corpo rodam do mesmo ângulo

A ***posição angular*** do corpo rígido é o ângulo θ entre a linha de referência no corpo e a linha de referência fixa no espaço;

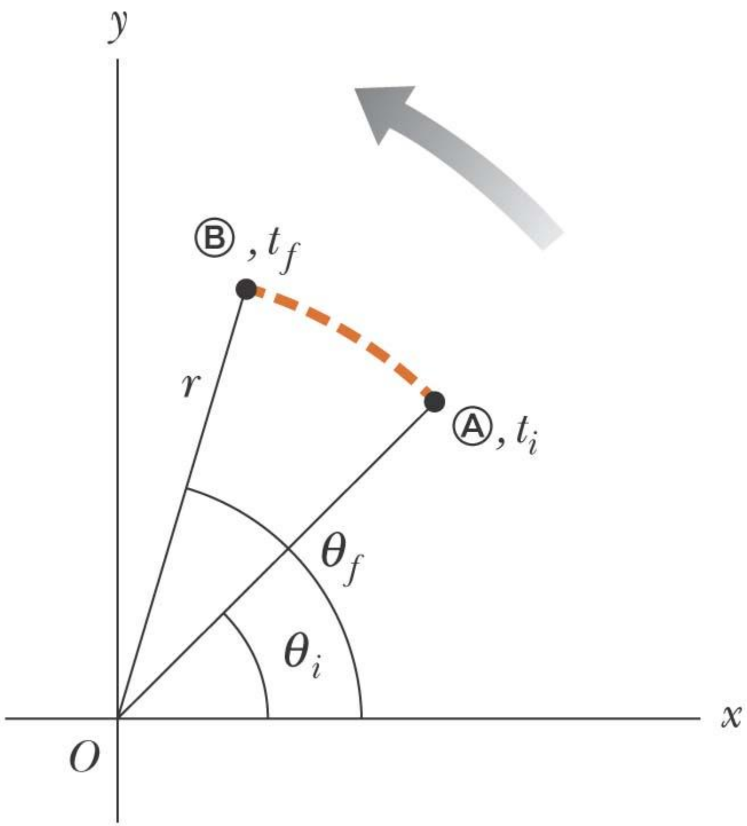
Em geral a linha de referência fixa é o eixo dos *x*

Variáveis angulares - Deslocamento Angular

O *deslocamento angular* é o ângulo de que o corpo roda num dado intervalo de tempo:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

Este é o ângulo varrido pela linha de referência de comprimento *r* .



FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Variáveis angulares - Velocidade angular média

A velocidade angular média, ω_{med}, de um corpo rígido em rotação é a razão entre o deslocamento angular e o intervalo de tempo em que ele ocorre

$$\omega_{\mathrm{med}} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

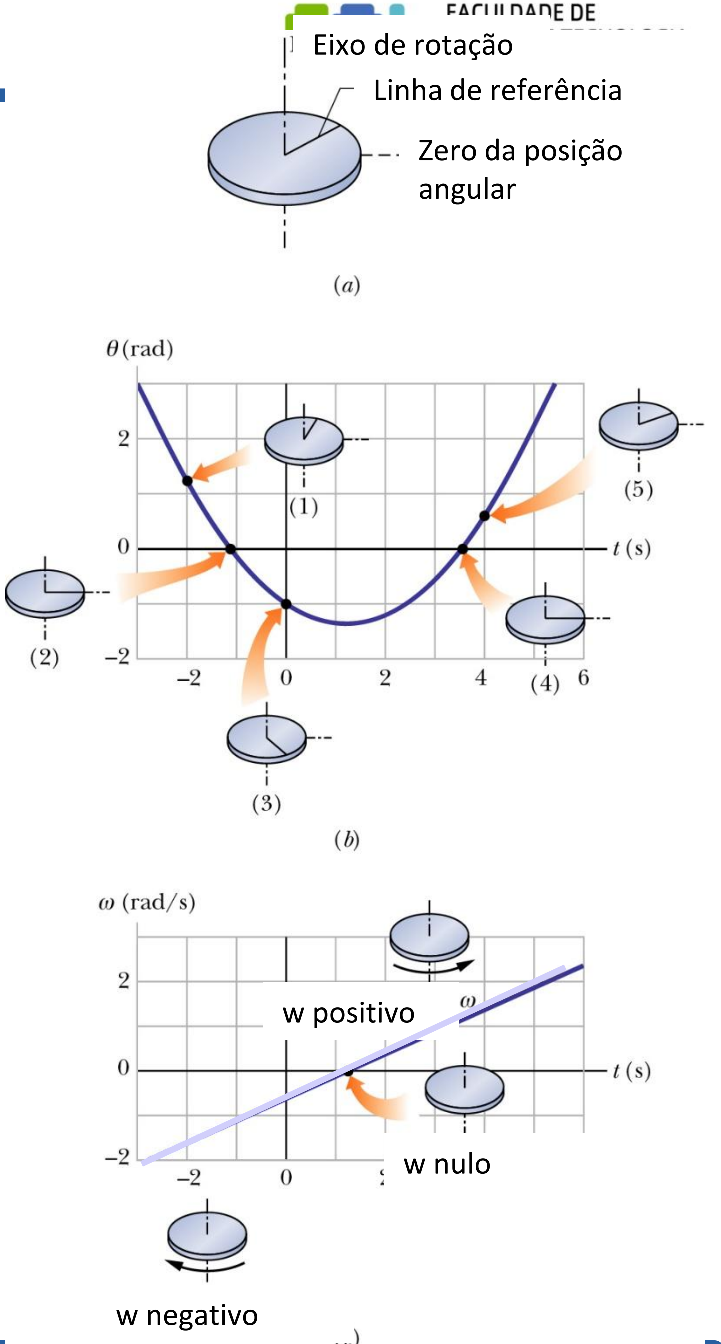
A unidade SI de velocidade angular é rad/s

Variáveis angulares - Velocidade angular Instantânea

A velocidade angular *instantânea* é o limite da velocidade angular média, quando o intervalo de tempo tende para zero:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Deslocamento e Velocidade Angulares



A unidade SI de velocidade angular é rad/s;

A velocidade angular é positiva se θ está a aumentar (sentido directo);

A velocidade angular é negativa se θ está a diminuir (sentido retrógrado).

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Variáveis angulares - Aceleração Angular Média

A aceleração angular média, $\bar{\alpha}$, de um corpo é a razão da variação da velocidade angular em relação ao intervalo de tempo em que ocorre:

$$\alpha_{\mathrm{med}} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleração Angular Instantânea

A aceleração angular instantânea é definida como o limite, quando o tempo tende para zero, da aceleração angular média:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Aceleração Angular

A unidade SI da aceleração angular é rad/s^2;

A aceleração angular é positiva se o módulo da velocidade angular de um corpo que roda no sentido directo está a aumentar;

A aceleração angular também é positiva se o módulo da velocidade angular de um corpo que roda no sentido retrógrado está a diminuir.

Movimento de Rotação, Resumo

Quando um corpo rígido roda em torno de um eixo fixo num determinado intervalo de tempo, cada partícula do corpo roda do mesmo ângulo num determinado intervalo de tempo e possui a mesma velocidade angular e a mesma aceleração angular;

Assim θ, ω, α caracterizam o movimento (de rotação) do corpo rígido como um todo, assim como o movimento de cada partícula do corpo.

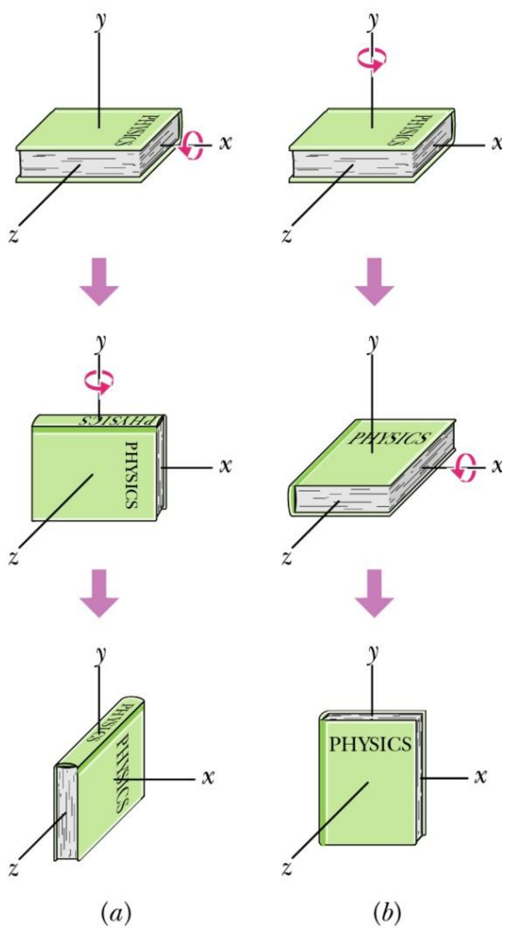
Deslocamento angular como vector

Uma rotação finita não é, em geral um vector;

Na realidade, a adição de rotações de um ângulo finito não é comutativa, em geral;

Verifica-se $$\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$$

a menos que o eixo de rotação seja o mesmo.



Deslocamento angular como vector

Mas uma rotação infinitesimal é um vector:

$$d\vec{\theta}$$

O módulo é o ângulo: $d\theta$

A direcção é a do eixo de rotação e o sentido pode ser dado pela regra da mão direita.

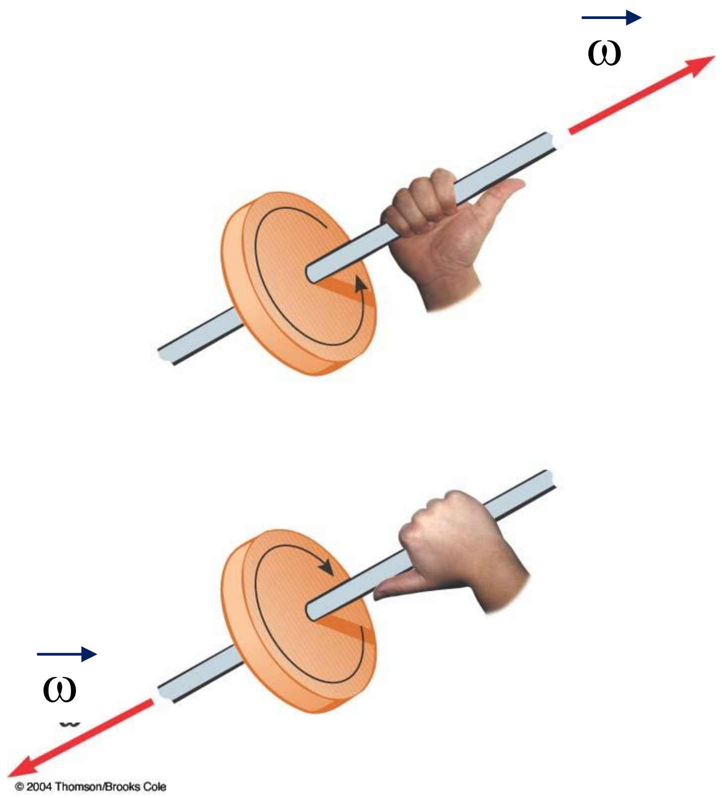
O Vector Velocidade Angular Instantânea

A velocidade angular instantânea é:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

A direcção é a do eixo de rotação e o sentido pode ser dado pela regra da mão direita

(como para $d\vec{\theta}$)



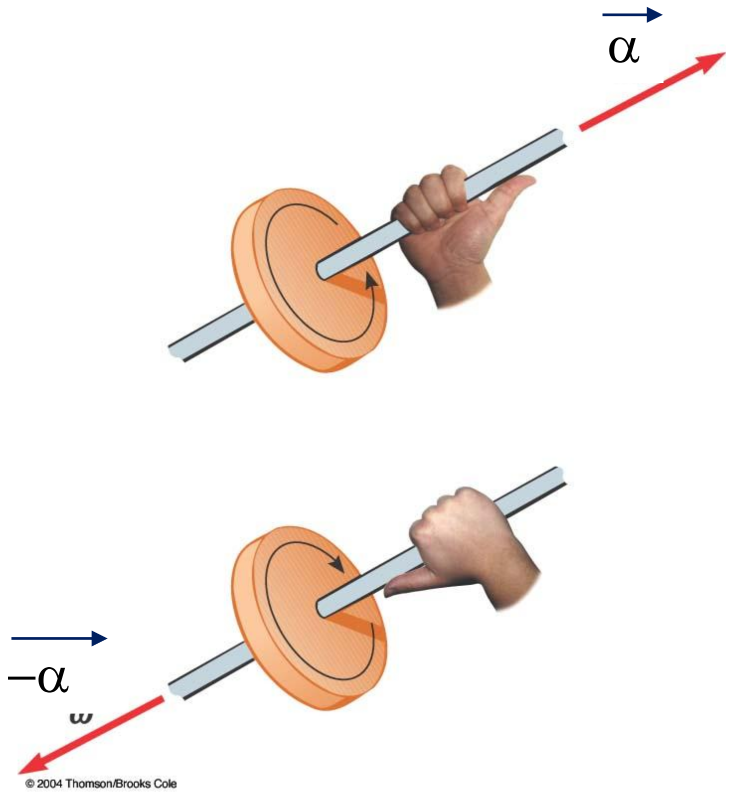
O Vector Aceleração Angular Instantânea

A aceleração angular instantânea é:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

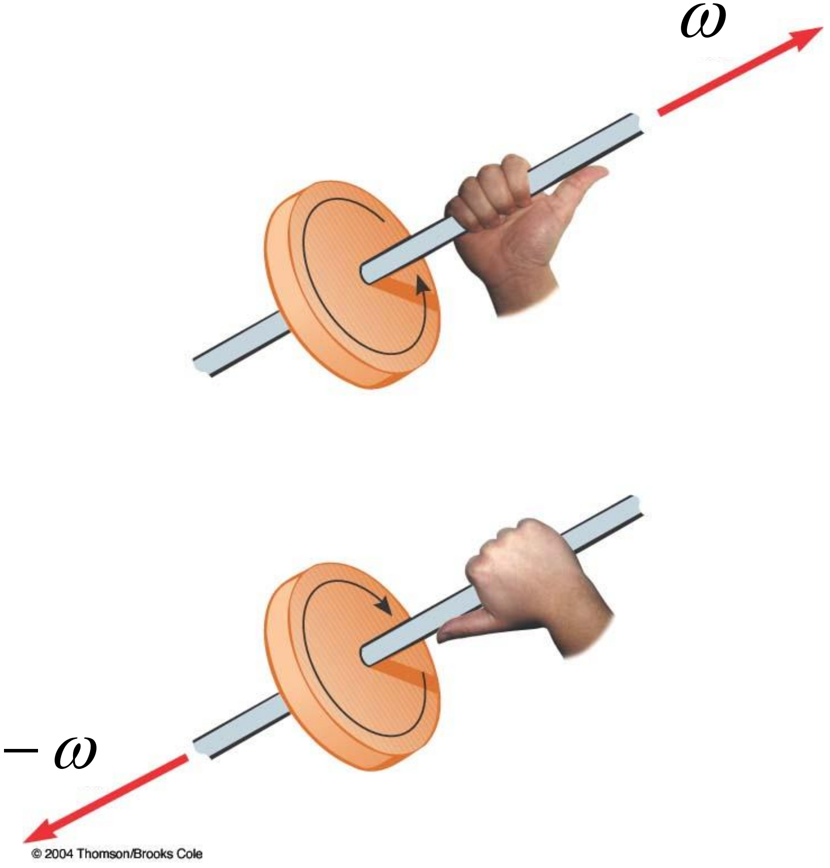
A direcção é a do eixo de rotação e o sentido pode ser dado pela regra da mão direita

(como para $d\vec{\omega}$)



Direcção e Sentido

Na realidade, utilizámos atrás grandezas escalares para caracterizar a velocidade e a aceleração angulares (ω, α) porque a rotação era em torno de um **eixo fixo**



Resolução de Problemas

As técnicas são análogas às da resolução dos problemas de translação unidimensional

- Se a aceleração angular é constante, as técnicas são análogas às do movimento unidimensional com aceleração constante

Existem diferenças que devem ser tidas em conta

No movimento de rotação *temos de definir* um eixo de rotação

Cinemática Rotacional

Se a **aceleração angular** for **constante**, podemos descrever o movimento do corpo rígido utilizando um conjunto de equações cinemáticas;

Estas equações são análogas às equações cinemáticas para o movimento rectilíneo;

As equações para o movimento de rotação possuem a mesma forma das equações do movimento rectilíneo.

Equações da Cinemática Rotacional

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\left(\theta_f - \theta_i\right)$$

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}\left(\omega_i + \omega_f\right)t$$

Comparação entre as Equações da Cinemática Rotacional e da Cinemática Linear

Equações da Cinemática Rotacional e Rectlínea do Movimento com aceleração constante	
Movimento de Rotação em torno de um eixo fixo	Movimento Rectlíneo
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

A Relação entre Grandezas Angulares e Lineares (eixo de rotação fixo)

Deslocamentos

$$s = \theta r$$

Velocidades

$$v = \omega r$$

Acelerações

$$a = \alpha r$$

Todos os pontos do corpo em rotação possuem o mesmo movimento angular

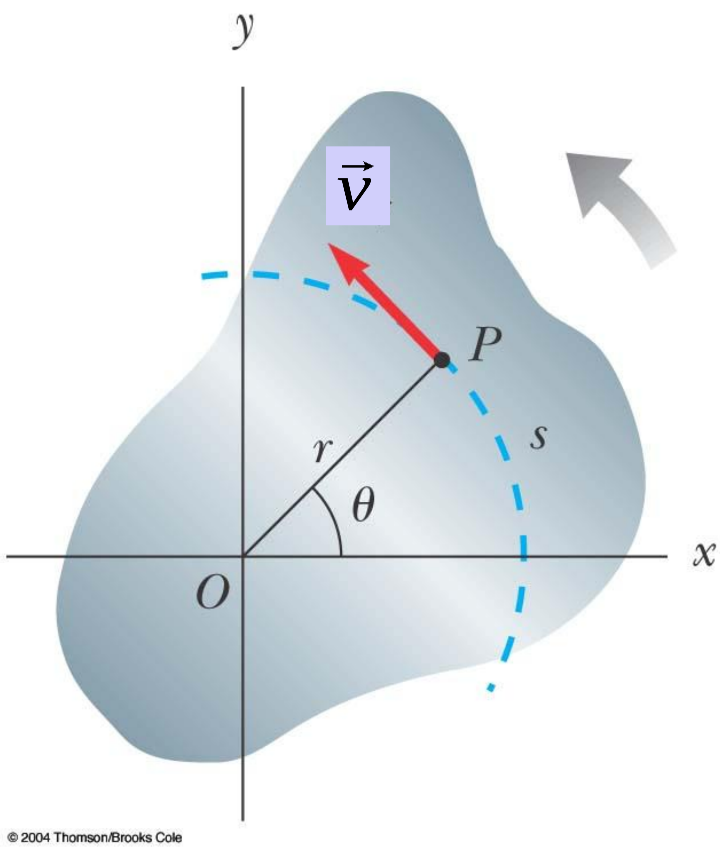
Mas o movimento rectilíneo é *diferente* de ponto para ponto

Velocidades

A velocidade linear é sempre tangente à trajectória circular

Denominada velocidade tangencial

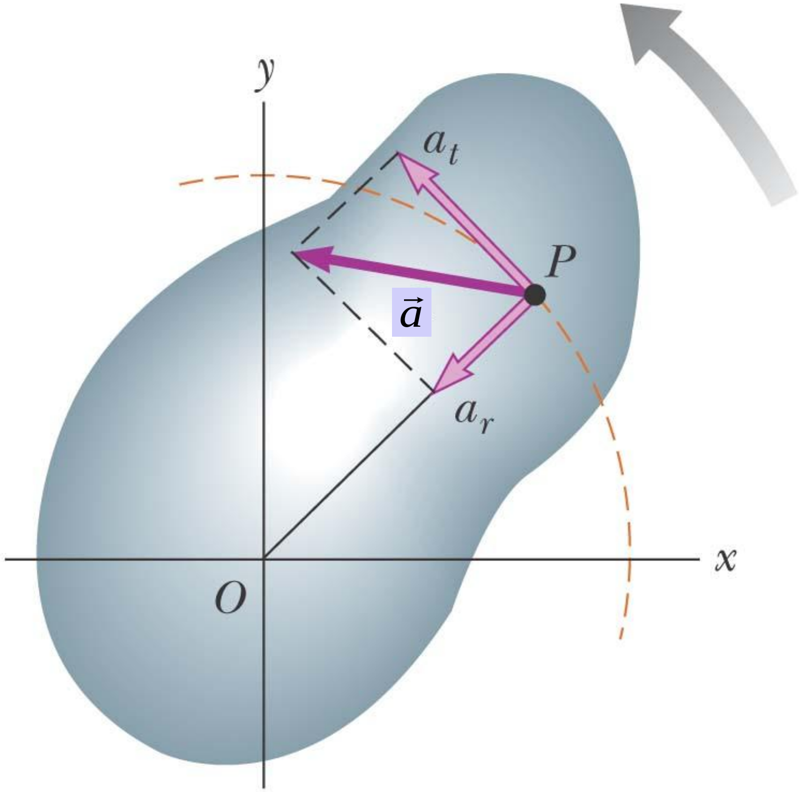
$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$



Acelerações

A aceleração tangencial (componente tangencial da aceleração) é a derivada componente tangencial (que é a única) da velocidade linear

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$



Comparação entre Grandezas

Todos os pontos de um corpo rígido possuem a mesma velocidade angular mas **não** a mesma *velocidade linear*;

Todos os pontos de um corpo rígido possuem a mesma aceleração angular mas **não** a mesma *componente tangencial* da aceleração;

Porque o valor das grandezas lineares depende de *r*, e *r* não tem o mesmo valor para todos os pontos do corpo.

Aceleração Centrípeta

Todos os pontos de um corpo rígido em rotação possuem aceleração com uma componente centrípeta

$$a_C = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Aceleração Resultante

A componente tangencial da aceleração resulta da variação do módulo da velocidade;

A componente centrípeta da aceleração resulta da variação da direcção;

O módulo da aceleração é obtido a partir destas componentes:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Energia Cinética Rotacional

Um corpo que roda em torno de um eixo com velocidade angular, ω, possui energia cinética rotacional, mesmo que não possua energia cinética de translação;

Cada partícula possui a energia cinética

$E_c = ½\, m_i v_i^2$

Como v_i depende da distância, r, ao eixo de rotação, podemos efectuar a substituição $v_i = \omega\, r_i$

Energia Cinética Rotacional

A energia cinética rotacional do corpo rígido é a soma dos valores da energia cinética de todas as partículas do corpo

$$E_{C_R} = \sum_i E_{C_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$E_{C_R} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

I é denominado *momento de inércia* do corpo

Quando se refere o momento de inércia de um corpo, é necessário indicar o eixo em relação ao qual é calculado

Energia Cinética Rotacional

Há uma analogia entre a expressão da energia cinética associada ao movimento linear ($E_C = ½\, mv^2$) e a energia cinética associada ao movimento rotacional ($E_{CR} = ½\, I\omega^2$);

A energia cinética rotacional não é um novo tipo de energia, a expressão é diferente porque está escrita em termos de grandezas rotacionais;

A energia cinética rotacional exprime-se, obviamente, em joule (J).

Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo define-se como:

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

r_i é a distância do elemento de massa m_i ao eixo em relação ao qual o momento de inércia é calculado

As dimensões são $[M][L]^2$ e a unidade SI é $kg{\cdot}m^2$